

## Série 4 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 1.3, 1.4, 1.5 Mots-clés : *Espace engendré, dépendance et indépendance linéaire, application linéaire*

### Remarques :

1. La série est volontairement longue, il n'est pas indispensable de la finir en une semaine. Vous pouvez sauter certains exercices, et les aborder pendant les vacances, ou pendant les séances de révision.
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

---

### Exercice 1

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils  $\mathbb{R}^3$  (questions a) et b)) ou  $\mathbb{R}^2$  (question c)) ?

a)  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

b)  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

c)  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ .

### Sol.:

- a) On cherche une combinaison linéaire des vecteurs telle que

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui conduit au système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 0 \\ 2x_1 & + x_3 = 0 \\ x_1 & = 0 \end{cases}.$$

Ce système possède une unique solution triviale  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , donc les vecteurs  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  sont linéairement indépendants, et ils engendrent  $\mathbb{R}^3$ .

- b)  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  ne sont pas linéairement indépendants. En effet,  $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$ . Ainsi ces trois vecteurs n'engendrent pas  $\mathbb{R}^3$ .
- c)  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  et  $\vec{v}_3$  ne sont pas linéairement indépendants, car ils sont de taille 2 strictement inférieure au nombre 3 de vecteurs. Cependant, ces vecteurs sont linéairement indépendants deux à deux, donc ils engendrent  $\mathbb{R}^2$ .

### Remarque

On utilise :

*Les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbb{R}^m$ .*

$\Leftrightarrow$  Pour tout vecteur  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ , l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  a une solution  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  (tout vecteur  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$  peut s'exprimer comme combinaison linéaire des colonnes de  $A$ ).

$\Leftrightarrow$  La matrice augmentée n'a pas de ligne de la forme  $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$  avec  $c$  non nul (car le système est compatible); la forme échelonnée de  $A$  n'a pas de ligne nulle  $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$  (car  $A\vec{x} = \vec{b}$  a une solution pour tout  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ ).

$\Leftrightarrow$  Chaque ligne a une position pivot.

### Exercice 2

L'assertion suivante est-elle correcte (justifier)?

Tout ensemble de vecteurs  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$  de  $\mathbb{R}^n$  est linéairement dépendant si  $p > n$ .

**Sol.:**

L'assertion est correcte.

Théorème : si un ensemble  $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$  contient plus de vecteurs que chaque vecteur n'a de composantes, alors  $S$  est linéairement dépendant.

Justification : lorsque  $p = n$ , les vecteurs sont soit déjà linéairement dépendants, soit linéairement indépendants et ils engendrent alors  $\mathbb{R}^n$ . Ce dernier cas signifie que tout vecteur (en particulier un nouveau vecteur que l'on ajoute à l'ensemble  $S$ ) peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

### Exercice 3

Trouver les matrices associées à chacune des transformations linéaires suivantes

a)  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{T} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{T} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ .

b)  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{T} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{T} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{T} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

c)  $\mathbf{R} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est la rotation d'axe  $Oz$  et d'angle  $60^\circ$  (dans le sens trigonométrique).

**Sol.:**

a) **Transformation  $\mathbf{T}$**  :  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Pour une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}^3$ , la matrice associée est de dimension  $3 \times 2$ .

Les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  forment la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

La matrice de  $\mathbf{T}$  s'obtient en plaçant en colonnes les images des vecteurs de la base canonique :

$$\text{— Première colonne : } \mathbf{T} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{— Deuxième colonne : } \mathbf{T} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice associée à  $\mathbf{T}$  est :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

b) **Transformation  $\mathbf{T}$**  :  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Pour une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^3$  vers  $\mathbb{R}^3$ , la matrice associée est de dimension  $3 \times 3$ .

Les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  forment la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Donc la matrice associée à  $\mathbf{T}$  est :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) **Rotation  $\mathbf{R}$**  :  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  d'axe  $Oz$  et d'angle  $60^\circ$

Une rotation d'axe  $Oz$  et d'angle  $\theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$  dans le sens trigonométrique laisse invariante la coordonnée  $z$  et effectue une rotation dans le plan  $(x, y)$ .

La matrice de rotation autour de l'axe  $Oz$  est donnée par :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec  $\theta = 60^\circ$ , on a :

$$\text{— } \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\text{— } \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc la matrice associée à  $\mathbf{R}$  est :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Vérification :**

$$- \mathbf{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (rotation de } \vec{e}_x \text{ de } 60^\circ)$$

$$- \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (rotation de } \vec{e}_y \text{ de } 60^\circ)$$

$$- \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (l'axe de rotation reste invariant)}$$

**Exercice 4**

a) Déterminer si les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  sont linéairement indépendants.

b) Déterminer si les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  engendrent  $\mathbb{R}^4$ .

**Sol.:**

a) Cherchons les valeurs de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et  $\alpha_4$  telles que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'élimination de Gauss de la matrice augmentée associée nous donne

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{L_4 - L_1} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Ainsi, la solution du système est unique

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

et les vecteurs  $(1, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0, 2)$ ,  $(0, 1, 1, 2)$  et  $(0, 0, 1, 2)$  sont linéairement indépendants.

b) Comme une forme échelonnée de la matrice de coefficients a des pivots dans chaque ligne, les vecteurs  $(1, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0, 2)$ ,  $(0, 1, 1, 2)$  et  $(0, 0, 1, 2)$  engendrent  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 5**

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Les colonnes d'une matrice  $A$  sont linéairement indépendantes si l'équation  $A\vec{x} = \vec{0}$  admet la solution triviale. □ □

- b) Si  $A$  possède des colonnes linéairement dépendantes, alors l'équation  $A\vec{x} = \vec{0}$  admet une solution non triviale.
- c) Les colonnes de toute matrice de taille  $4 \times 5$  sont linéairement dépendantes.
- d) Si le vecteur nul est l'un des vecteurs d'une famille  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ , alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

**Sol.:**

- a) Faux. Toute équation homogène admet la solution triviale, on ne peut donc rien dire à propos des colonnes de  $A$ . L'assertion serait vraie si l'équation  $A\vec{x} = \vec{0}$  admettait **uniquement** la solution triviale.
- b) Vrai. Si  $A$  possède des colonnes linéairement dépendantes, cela signifie qu'il existe des nombres  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$  tels que  $\lambda_1 \vec{c}_1 + \dots + \lambda_n \vec{c}_n = \vec{0}$  où  $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n$  sont les  $n$  colonnes de  $A$ . Le vecteur  $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$  est alors une solution non triviale de l'équation  $A\vec{x} = \vec{0}$ .
- c) Vrai. Plus généralement, une matrice de taille  $m \times n$  avec  $m < n$  (plus de colonnes que de lignes) possède des colonnes linéairement dépendantes. Cela vient du fait que le nombre de lignes linéairement indépendantes d'une matrice  $A$  est égal au nombre de colonnes linéairement indépendantes de  $A$  (on dit que le rang-ligne de  $A$  est égal au rang-colonne de  $A$ ). Ainsi,  $A$  possède au maximum  $m$  lignes linéairement indépendantes et donc au maximum  $m$  colonnes linéairement indépendantes. Comme  $n > m$  on en déduit que les  $n$  colonnes de  $A$  doivent être linéairement dépendantes.
- d) Faux. Si le vecteur nul est l'un des vecteurs d'une famille  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p)$ , disons  $\vec{0} = \vec{v}_k$  pour un certain  $1 \leq k \leq p$  alors la combinaison linéaire  $0 \cdot \vec{v}_1 + \dots + 1 \cdot \vec{v}_k + \dots + 0 \cdot \vec{v}_p$  est égale au vecteur nul  $\vec{0}$  et donc ces vecteurs sont linéairement dépendants.

### Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine.
- b) Si un ensemble comporte moins de vecteurs que le nombre de composantes de ceux-ci, alors il est linéairement indépendant.
- c) Une équation homogène est toujours compatible.
- d) Si  $\vec{x}$  est une solution non triviale de  $A\vec{x} = \vec{0}$ , alors aucune composante de  $\vec{x}$  est nulle.

**Sol.:**

- a) Vrai. Deux vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont linéairement dépendants s'il existe des nombres  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$  tels que  $\lambda \vec{v} + \mu \vec{w} = \vec{0} \iff \lambda \vec{v} = -\mu \vec{w}$ . Si  $\lambda \neq 0$  on peut donc écrire  $\vec{v} = -\frac{\mu}{\lambda} \vec{w}$  et donc  $\vec{v}$  est multiple de  $\vec{w}$ . Si  $\lambda = 0$  alors forcément  $\mu \neq 0$  et par le même argument on

a) que  $\vec{w}$  est multiple de  $\vec{v}$ . Ceci signifie exactement que les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine.

- b) Faux. Prenons par exemple les 2 vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ayant 3 composantes. Ils sont pourtant linéairement dépendants.
- c) Vrai. Une équation homogène  $A\vec{x} = \vec{0}$  possède toujours au moins la solution nulle et est donc toujours compatible.
- d) Faux. Prenons par exemple la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Alors  $\vec{x}$  est une solution non triviale de  $A\vec{x} = \vec{0}$ , mais  $\vec{x}$  a une composante nulle.

### Exercice 7

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- |   | V                        | F                        |
|---|--------------------------|--------------------------|
| a) Si une matrice $A$ est de taille $m \times n$ alors l'image de la transformation $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est contenue dans $\mathbb{R}^n$ . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Chaque transformation linéaire est une transformation matricielle.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) La transformation $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = mx^2 + b$ est linéaire pour $b = 0$ .                            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Une transformation linéaire préserve les opérations d'addition vectorielle et de multiplication par un scalaire.                               | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| e) Chaque transformation $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une transformation linéaire.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

### Sol.:

- a) Faux. Si une matrice  $A$  est de taille  $m \times n$  alors l'image de la transformation  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$  est contenue dans  $\mathbb{R}^m$  et non pas  $\mathbb{R}^n$ .
- b) Faux. Chaque transformation matricielle est une transformation linéaire, mais l'inverse est faux, cf. plus bas pour une solution détaillée.
- c) Faux. La transformation  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = mx^2$  n'est pas linéaire si  $m \neq 0$  (si  $m = 0$  elle est banalement linéaire). En effet  $f(x + y) = m(x + y)^2 = m(x^2 + 2xy + y^2) \neq mx^2 + mxy^2$  si  $x, y$  et  $m$  sont  $\neq 0$ .
- d) Vrai. Par définition, une transformation linéaire préserve les opérations d'addition vectorielle et de multiplication par un scalaire.
- e) Faux. Par exemple, la transformation  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $T(x, y) = (x^2, y^2)$  n'est pas linéaire.

**Solution pour b) :** L'exemple suivant nous donne une transformation linéaire mais non matricielle : soit  $C([0, 1])$  l'ensemble des fonctions continues  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Définissons la transformation

$$T : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{telle que} \quad T(f) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Elle est linéaire, car  $T(f + g) = T(f) + T(g)$  et  $T(\lambda f) = \lambda T(f)$ , mais il n'existe pas une matrice associée.

### Exercice 8

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Les vecteurs  $\vec{u} - \vec{v}$ ,  $\vec{u} - \vec{w}$  et  $\vec{v} - \vec{w}$  sont linéairement dépendants pour tout choix de  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ .
- b) Un ensemble formé d'un seul vecteur est linéairement indépendant.
- c) Une matrice  $6 \times 4$  doit posséder quatre pivots pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes.
- d) Les colonnes d'une matrice  $3 \times 4$  engendrent  $\mathbb{R}^3$ .

**Sol.:**

- a) Vrai. En effet, appelons  $\vec{u}_1 = \vec{u} - \vec{v}$ ,  $\vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{w}$  et  $\vec{u}_3 = \vec{v} - \vec{w}$ . Alors on a que  $\vec{u}_2 - \vec{u}_1 = \vec{u}_3$  et donc ces vecteurs sont linéairement dépendants pour tout choix de  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ .
- b) Faux. Le vecteur nul  $\vec{0}$  est toujours linéairement dépendant.
- c) Vrai. Si une matrice  $6 \times 4$  possède 4 colonnes linéairement indépendantes alors elle a également 4 lignes linéairement indépendantes. Ainsi cette matrice (ou plutôt sa forme échelonnée-réduite) doit posséder quatre pivots (pour avoir 4 lignes indépendantes).
- d) Faux. Par exemple la matrice nulle de taille  $3 \times 4$  a des colonnes qui sont toutes nulles et donc elles n'engendrent pas  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice 9

Soit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{pmatrix}$$

- L'ensemble  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  est linéairement indépendant pour  $h = -2$ .
- Le vecteur  $\mathbf{v}_2$  dépend linéairement des vecteurs  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_3$  pour  $h \neq 2$ .
- L'ensemble  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  est linéairement indépendant pour  $h \neq -2$ .
- Le vecteur  $\mathbf{v}_3$  dépend linéairement des vecteurs  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  pour  $h = 2$ .

**Sol.:** La seule bonne réponse est la deuxième. On a

$$\left[ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \right] \sim \begin{matrix} L_2 - 3L_1 \\ L_3 + 2L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & h+2 \end{bmatrix}$$

La deuxième ligne montre que quelque soit la valeur de  $h$ , le système  $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$  est inconsistant et donc  $\mathbf{v}_3$  ne peut pas se trouver dans  $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ . En fait, on voit que  $\mathbf{v}_2$  est un multiple de  $\mathbf{v}_1$ . La famille  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  est donc linéairement dépendante. *A fortiori* la famille  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  est aussi linéairement dépendante! Cette observation élimine les réponses 1 et 3.

Quelle que soit la valeur de  $h$ , les vecteurs  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$  et  $\mathbf{v}_3$  sont linéairement dépendants car il n'y a pas un pivot dans chacune des colonnes de la matrice augmentée.

### Exercice 10

Les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants si

$b = 1$

$b = 2$

$b = 3$

$b = 4$

**Sol.:**  $b = 4$

### Exercice 11

Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants :

- a)  $A$  est une matrice  $3 \times 3$  avec des colonnes linéairement indépendantes.
- b)  $A$  est une matrice  $4 \times 2$ ,  $A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2)$  et  $\vec{a}_2$  n'est pas un multiple de  $\vec{a}_1$ .
- c)  $A$  est une matrice  $4 \times 3$ ,  $A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3)$ . Les vecteurs  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  sont linéairement indépendants, et  $\vec{a}_3$  n'est pas une combinaison linéaire de  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$ .

**Sol.:**

- a) Comme les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes, le système homogène  $A\vec{x} = \vec{0}$  n'admet que la solution triviale. Ainsi la forme échelonnée réduite s'écrit  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- b) Si  $\vec{a}_2$  n'est pas un multiple de  $\vec{a}_1$ , alors il n'existe pas  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1$ . Deux cas sont possibles.

Si  $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ , alors les deux vecteurs  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  sont linéairement indépendants, et la forme échelonnée réduite est :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Si  $\vec{a}_1$  est le vecteur nul, alors le vecteur  $\vec{a}_2$  est non nul (car non multiple de  $\vec{0}$ ), et la forme échelonnée réduite est :  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- c)  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  sont linéairement indépendants, donc ils engendrent un plan, c'est-à-dire un espace de dimension 2. Le vecteur  $\vec{a}_3$  n'est pas dans cet espace, car ce n'est pas une combinaison linéaire de  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ . Par conséquent, les trois vecteurs  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  engendrent un espace de dimension 3, ils sont linéairement indépendants.

D'où la forme échelonnée réduite de  $A$  :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Exercice 12

Trouver les matrices correspondant aux transformations linéaires suivantes (exprimées dans la base canonique) :

- a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{b) } T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

**Sol.:**

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

### Exercice 13

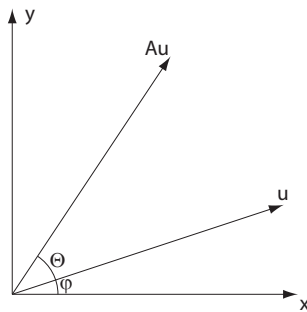
Décrire géométriquement la transformation linéaire suivante :  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par

$$T(\vec{u}) = A\vec{u} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}.$$

*Indication :* Calculer les images de  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  par  $T$ .

**Sol.:**

Les images de  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sont  $\begin{pmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -\sin \Theta \\ \cos \Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} + \Theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2} + \Theta) \end{pmatrix}$ , respectivement. La transformation linéaire correspond à une rotation anti-horaire d'angle  $\Theta$ .



On peut aussi décrire la transformation de la façon suivante. Un vecteur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  s'écrit en coordonnées polaires  $\vec{u} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ , et par les formules d'addition d'angles on calcule

$$A\vec{u} = r \begin{pmatrix} \cos \Theta \cos \varphi - \sin \Theta \sin \varphi \\ \sin \Theta \cos \varphi + \cos \Theta \sin \varphi \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\Theta + \varphi) \\ \sin(\Theta + \varphi) \end{pmatrix}.$$

On voit que la longueur  $r$  n'est pas modifiée par la transformation  $T$ , mais l'angle  $\varphi$  est remplacé par  $\Theta + \varphi$ , donc  $T$  est bien une rotation d'angle  $\Theta$ .

### Exercices additionnels

#### Exercice 14

Prouver le théorème suivant :

Un ensemble  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ ,  $p \geq 2$  est linéairement dépendant si et seulement si au moins un vecteur est combinaison linéaire des autres.

**Sol.:**

$\Rightarrow \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$  est un ensemble linéairement dépendant, donc l'équation vectorielle

$$x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_p \vec{v}_p = \vec{0}$$

admet une solution non-triviale. Soient  $s_1, \dots, s_p \in \mathbb{R}$  non-tous nuls, tels que  $s_1 \vec{v}_1 + \dots + s_p \vec{v}_p = \vec{0}$ . Il existe un coefficient  $s_j$  non-nuls et on peut écrire

$$s_j \vec{v}_j = -s_1 \vec{v}_1 - \dots - s_{j-1} \vec{v}_{j-1} - s_{j+1} \vec{v}_{j+1} - \dots - s_p \vec{v}_p.$$

(Si  $j = 1$  ou  $j = p$  on modifie l'expression ci-dessus.) Ainsi

$$\vec{v}_j = -\frac{1}{s_j} (s_1 \vec{v}_1 + \dots + s_{j-1} \vec{v}_{j-1} + s_{j+1} \vec{v}_{j+1} + \dots + s_p \vec{v}_p),$$

et  $\vec{v}_j$  est combinaison linéaire des autres vecteurs.

$\Leftarrow$  On suppose qu'un vecteur est combinaison linéaire des autres. On peut renuméroter les vecteurs de sorte à avoir que  $\vec{v}_1$  est combinaison linéaire des autres avec comme coefficients  $c_2, \dots, c_p \in \mathbb{R}$

$$\vec{v}_1 = c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_p \vec{v}_p.$$

On a alors

$$\vec{0} = \vec{v}_1 - \vec{v}_1 = \vec{v}_1 - c_2 \vec{v}_2 - \dots - c_p \vec{v}_p.$$

On trouve alors une solution  $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -c_2 \\ \vdots \\ -c_p \end{pmatrix}$  non-triviale et l'ensemble de vecteurs est linéairement dépendant.

#### Exercice 15

Prouver l'affirmation suivante :

Soit l'ensemble  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $p < n$  alors l'ensemble ne peut pas être une base de  $\mathbb{R}^n$ .

**Sol.:** Pour être une base de  $\mathbb{R}^n$  il faut que pour tout  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{b} \in \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ . C'est à dire que l'équation vectorielle  $x_1 \vec{v}_1 + \dots + x_p \vec{v}_p = \vec{b}$  admette une solution. Mais pour avoir une solution pour chaque  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ , il faut que la matrice  $A = (\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_p)$  de taille  $n \times p$  ait un pivot dans chaque

ligne et donc qu'il n'y ait pas de ligne de zéros. Or comme  $p < n$ , la matrice a plus de lignes que de colonnes, donc au mieux la matrice  $A$  possède  $p$  pivots. Ainsi la matrice aura des lignes de zéros :

$$A = \begin{pmatrix} * & & & & \\ 0 & * & & & \\ 0 & 0 & * & & \\ 0 & 0 & 0 & * & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

et le système correspondant à  $A\vec{v} = \vec{b}$  sera incompatible pour certains  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ .

### Exercice 16

Déterminer toutes les valeurs possibles des nombres  $a, b, c, d$  et  $e$  pour lesquelles la matrice suivante est sous forme échelonnée-réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & 1 & d & 3 \\ 0 & e & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Sol.:** La matrice suivante (sans lui effectuer des opérations élémentaires) est sous la forme échelonnée réduite si

$$e = 0, \quad c = 1, \quad b = 0 \quad d = 0$$

### Exercice 17

Déterminer les valeurs des paramètres réels  $a, b$  et  $c$  pour lesquelles le système d'équations

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + u = a \\ x + 3y - 2z + u = b \\ x - 7y + 8z + u = c \end{cases}$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

*Indication :* résoudre le système  $A\vec{v} = \vec{b}$  avec  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

**Sol.:** La matrice échelonnée-réduite du système est

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{5}(3a+2b) \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{5}(b-a) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c+b-2a \end{array} \right).$$

La condition d'existence des solutions est ainsi

$$c + b - 2a = 0.$$

Si cette condition est satisfaite, la solution générale existe et dépend de deux paramètres :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(3a+2b) \\ \frac{1}{5}(b-a) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout } s, t \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 18**

Écrire les systèmes linéaires suivant sous la forme  $A\vec{x} = \vec{b}$ . Déterminer dans chaque cas si les colonnes de la matrice  $A$  sont linéairement indépendantes.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -7x_1 + 37x_2 + 119x_3 = 0 \\ 5x_1 + 19x_2 + 57x_3 = 0 \end{cases}$$

**Sol.:**

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -2 & -7 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est carrée et le système possède une infinité de solutions, donc les colonnes de  $A$  sont linéairement dépendantes.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est carrée et le système possède seulement la solution triviale, donc les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes.

c)

$$\begin{pmatrix} -7 & 37 & 119 \\ 5 & 19 & 57 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $A$  a strictement moins de lignes que de colonnes, donc ses colonnes sont linéairement dépendantes. On peut aussi arguer que le système possède une infinité de solutions.

**Exercice 19**

a. Combien de colonnes pivots une matrice  $7 \times 5$  doit-elle posséder pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes ?

Moins de 5,  5 exactement,  7 exactement,  entre 5 et 7.

b. Combien de colonnes pivots une matrice  $5 \times 7$  doit-elle posséder pour que ses colonnes engendrent  $\mathbb{R}^5$  ?

Moins de 5,  5 exactement,  7 exactement,  entre 5 et 7.

c. L'application linéaire du plan  $\mathbb{R}^2$  dont la matrice est  $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$  est

une rotation  une translation  une projection orthogonale  une homothétie

**Sol.:**

a. Combien de colonnes pivots une matrice  $7 \times 5$  doit-elle posséder pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes ?

Elle doit posséder cinq colonnes pivots, parce que s'il n'y a pas cinq pivots alors il existe des inconnues libres et donc les colonnes sont dépendantes.

b. Combien de colonnes pivots une matrice  $5 \times 7$  doit-elle posséder pour que ses colonnes engendrent  $\mathbb{R}^5$  ?

Si les colonnes d'une matrice  $5 \times 7$  engendrent  $\mathbb{R}^5$  alors cette matrice doit posséder un pivot dans chaque ligne. Puisque chaque position pivot est dans une colonne cette matrice doit donc posséder cinq colonnes pivots.

c. C'est une projection orthogonale sur la diagonale  $x = y$ . On voit dans les colonnes de cette matrice que les images des deux vecteurs  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  sont égales et se trouvent sur cette diagonale. Une contemplation un peu plus approfondie de ces images montre qu'il s'agit bien des projections orthogonales.

### Exercice 20

Considérer les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} h+7 \\ 8 \\ 2h+1 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur  $\vec{v}_3$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  lorsque

$h = 2$

$h = 4$

$h = 1$

$h = -2$

**Sol.:**  $h = 4$

### Exercice 21

a) Les colonnes de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 10 & -7 & 1 \\ -5 & -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

forment-elles un ensemble de vecteurs linéairement dépendants ?

b) Les polynômes  $1, 1 + t, 1 + t + t^2, 1 + t + t^2 + t^3$  sont-ils linéairement dépendants ?

**Sol.:**

- a) La matrice  $M$  possède plus de colonnes que de lignes. Sa forme échelonnée ne peut donc pas contenir un pivot dans chaque colonne. Il y aura donc une inconnue libre et par conséquent une solution non triviale du système linéaire homogène  $M\vec{x} = \vec{0}$ . Cela implique que les colonnes de la matrice forment un ensemble linéairement dépendant.
- b) Ces polynômes forment une famille libre. En effet toute combinaison linéaire qui est égale au polynôme nulle

$$a \cdot 1 + b(1 + t) + c(1 + t + t^2) + d(1 + t + t^2 + t^3) = 0$$

doit avoir tous ses coefficients nuls. Cela se voit rapidement si on simplifie l'écriture de cette combinaison linéaire :

$$(a + b + c + d) + (b + c + d)t + (c + d)t^2 + dt^3 = 0$$

En observant les coefficients de droite à gauche on constate que  $d = 0$ , donc  $c = 0$ , si bien que  $b = 0$  et enfin  $a = 0$ .

## Exercice 22

Le système linéaire suivant où  $a$  est un paramètre réel

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ 2y + 2z = 1 - 2a \\ 2x + 4ay + 2z = 1 \\ 4x + 4ay + 2z = 1 + 2a \end{cases}$$

- possède une solution unique lorsque  $a = 1/2$
- ne possède aucune solution lorsque  $a \neq 1/2$
- possède une infinité de solutions lorsque  $a = 1/2$
- ne possède aucune solution lorsque  $a = 1/2$

**Sol.:** On écrit la matrice augmentée et on travaille :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 - 2a \\ 2 & 4a & 2 & 1 \\ 4 & 4a & 2 & 1 + 2a \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{L3} \rightarrow \text{L3} + (-1) \cdot \text{L1} \\ \text{L4} \rightarrow \text{L4} + (-2) \cdot \text{L1} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 - 2a \\ 0 & 4a - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4a - 4 & -2 & 2a - 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{L3} \rightarrow \text{L3} + (-2a) \cdot \text{L2} \\ \text{L4} \rightarrow \text{L4} + (-2a) \cdot \text{L2} \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 - 2a \\ 0 & -2 & -4a & -2a + 4a^2 \\ 0 & -4 & -2 - 4a & 4a^2 - 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{L3} \rightarrow \text{L3} + \text{L2} \\ \text{L4} \rightarrow \text{L4} + 2 \cdot \text{L2} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 - 2a \\ 0 & 0 & 2(1 - 2a) & (1 - 2a)^2 \\ 0 & 0 & 2(1 - 2a) & (1 - 2a)^2 \end{array} \right)$$

On distingue alors deux cas :

- Si  $(1 - 2a) = 0$ , c'est-à-dire  $a = \frac{1}{2}$ , alors on a les équations :  $2x + 2y + 2z = 1$  ainsi que  $2y + 2z = 0$ , ce qui donne les solutions  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = -z$  (infinité de solutions paramétrées par  $z \in \mathbb{R}$ ).
- Si  $(1 - 2a) \neq 0$ , alors la dernière équation donne  $z = \frac{1-2a}{2}$ . On trouve ensuite  $y = 0$  et, finalement,  $x = a$ . Dans ce cas, le système possède une seule solution.

Deux remarques :

1. Lors d'un examen il n'est pas nécessaire de trouver les solutions explicitement. Il suffit de se rendre compte que la matrice augmentée du système sous sa forme échelonnée ne contient aucune ligne dont le pivot se trouve dans la colonne des termes de droites (les  $b_i$ ) pour conclure le système a toujours au moins une solution (ce qui élimine les réponses 2 et 4).
2. Dans ce cas, il a été judicieux de ne pas diviser la première ligne de la matrice par deux, ce qui aurait fait apparaître des fractions et aurait rendu les calculs plus dur.

### Exercice 23

- a) Les vecteurs  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$  sont-ils linéairement dépendants ?
- b) Les vecteurs  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$  engendrent-ils  $\mathbb{R}^3$  ?
- c) Les vecteurs  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  engendrent-ils  $\mathbb{R}^4$  ?

**Sol.:**

- a) On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice obtenue en plaçant les vecteurs colonne par colonne. On commencera par diviser la première ligne par  $-8$ , puis on utilise cette ligne pour obtenir des zéros dans la dernière colonne, enfin on échange les lignes 1 et 3 :

$$[\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3] \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathbf{u}_2$  et  $\mathbf{u}_3$  ne sont donc pas linéairement dépendants car la matrice échelonnée contient un pivot dans chaque colonne.

- b) La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$  s'échelonne en trois opérations en  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Il y a un pivot dans chaque ligne si bien que tout vecteur de  $\mathbb{R}^3$  s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ .
- c) Il y a trop de lignes pour que trois vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  (ceux-ci ou d'autres) puissent engendrer  $\mathbb{R}^4$ . Il faudrait quatre pivots dans la matrice de taille  $4 \times 3$  qu'on construit en plaçant ces vecteurs dans les colonnes, alors qu'il ne peut y en avoir plus de trois.

---

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, Orane Pouchon, Jérôme Scherer, José Luis Zuleta, . . .). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.